جامعة البعث — سلم تصحيح مقرر ميكانيك السوائل — الدرجة: 100

كلية العلوم

قسم الرياضيات — سنة رابعة رياضيات (ميكانيك)

الدورة الإضافية 2016-2017

السؤال الأول: 55

١	خطأ	2	التصويب: يكون: $\vec{P_n}(M) = -\lvert\vec{P_n}(M)\rvert\,\vec{n}$.	3
٢	خطأ	2	التصويب: تكون $\lvert\vec{P_n}(M)\rvert$ تابعة لـ M فقط.	3
٣	خطأ	2	التصويب: بمقدار $\vec{p}$.	3
٤	خطأ	2	التصويب: عندئذٍ قد يكون هذا المائع متوازن وقد يكون غير متوازن	3
٥	خطأ	2	التصويب: عندئذٍ يكون هذا السائل غير متوازن.	3
٦	خطأ	2	التصويب: $\vec{F}(M) = (x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$.	3
٧	خطأ	2	التصويب: هما مستويان أفقيان.	3
٨	خطأ	2	التصويب: المعادلتان هما: $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{3y} = \frac{dz}{5z}$.	3
٩	خطأ	2	التصويب: هي جزء من كرات متحدة المركز: $C(3,-4,5)$.	3
١٠	خطأ	2	التصويب: الضغط في M يساوي: $\frac{2+\sqrt{5}}{2} p_0$	3
١١	خطأ	2	التصويب: زيادة الضغط في M عن الضغط الجوي p_0 تساوي: $\frac{\sqrt{5}}{2} p_0$.	3

(30) السؤال الثاني

أولاً: من أجل ذلك نحسب :

لدينا . $\vec{F} \cdot \vec{rot}\vec{F}$

$$\vec{rot}\vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay^2z^2 & -bxyz^2 & cxy^2z \end{vmatrix} = 2(c+b)xyz\,\vec{i} + (2a-c)y^2z\,\vec{j} - (b+2a)yz^2\,\vec{k}$$

بالتالي :

$$\vec{F}(M)\cdot\vec{rot}\vec{F}(M) = [2a(c+b) - b(2a-c) - c(b+2a)]xy^3z^3$$
$$= (2ac + 2ab - 2ab + bc - bc - 2ac)xy^3z^3$$
$$= 0 \quad \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{الفضاء}$$

وبالتالي ينتج عن ذلك ومن النظرية أنه يمكن للمائع المعطى أن يتوازن تحت تأثير قوة الحقل $\vec{F}$ 11

ثانياً: (1) المعادلات التفاضلية الديكارتية لخطوط الحقل لقوة الكتلة المعطاة $\vec{F}(M)$ هي :

$$\frac{dx}{3xy^2z^4} = \frac{dy}{3x^2yz^4} = \frac{dz}{-3x^2y^2z^3}$$

. من النسبة الأولى والثانية نجد ، بعد الاختصار : $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Leftarrow x\,dx - y\,dy = 0$ وبالمكاملة نجد :

$x^2 - y^2 = C_1$ (حيث C_1 ثابت ممكن اختياري) . ومن النسبة الثانية والثالثة نجد بعد الاختصار : $\frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y} \Leftarrow y\,dy + z\,dz = 0$ وبالمكاملة نجد :

$y^2 + z^2 = C_2$ (حيث $C_2 > 0$ ثابت ممكن اختياري موجب).

وخطوط الحقل لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$ في هذا الغاز المتوازن هي: $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ y^2 + z^2 = C_2 \end{cases}$ 11

(2) المعادلة التفاضلية الديكارتية لحزمة سطوح سوية الضغط في هذا الغاز المتوازن هي: $X(M)dx + Y(M)dy + Z(M)dz = 0$ (أياً كانت $M \equiv (x,y,z)$ من هذه الحزمة).

حيث $X(M) = 3xy^2z^4$ و $Y(M) = 3x^2yz^4$ و $Z(M) = -3x^2y^2z^3$ ؛

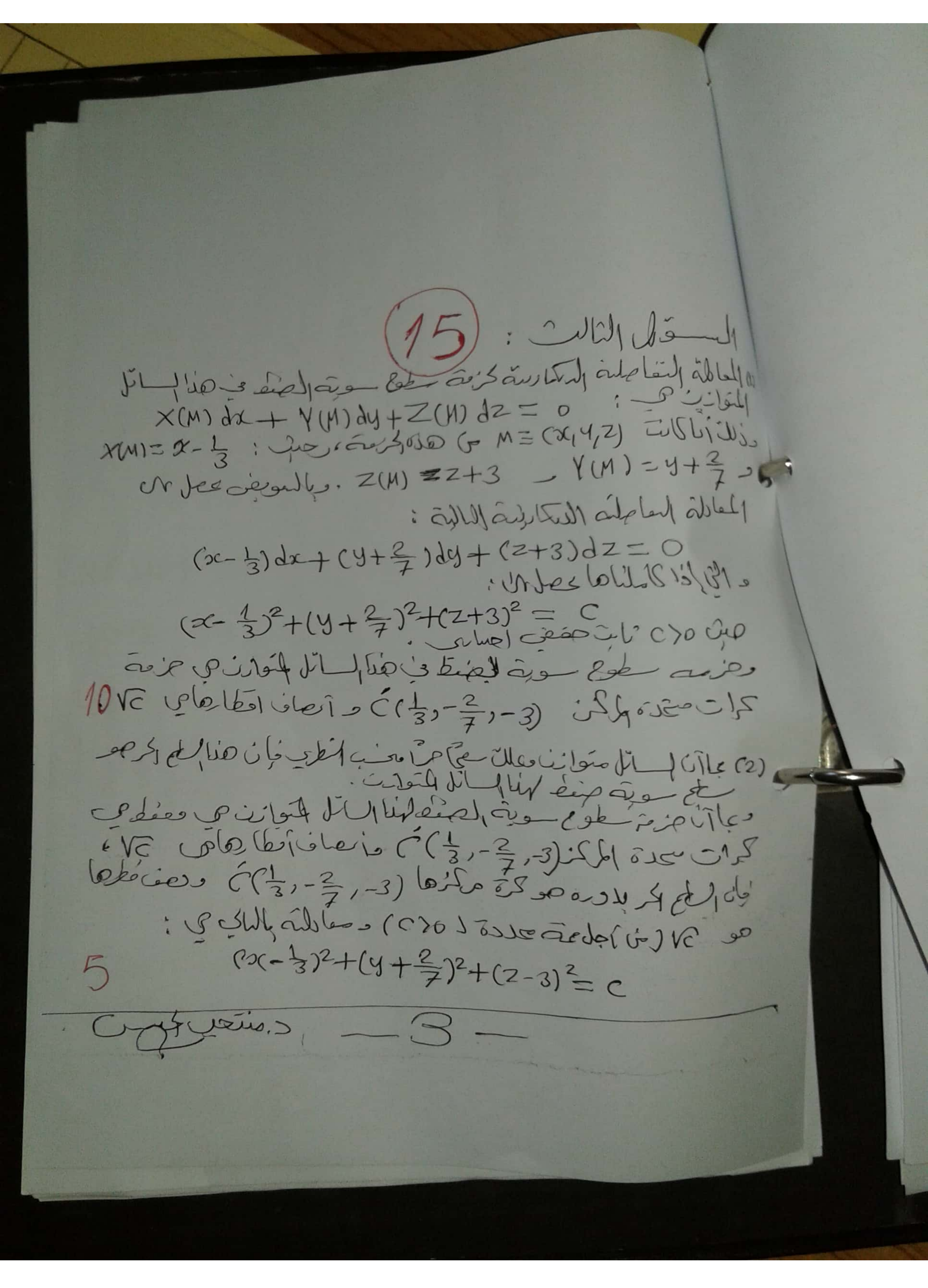
أي: $3xy^2z^4dx + 3x^2yz^4dy - 3x^2y^2z^3dz = 0$

وبضرب طرفي المعادلة التفاضلية السابقة بعامل التكامل: $\mu = \frac{1}{3x^2y^2z^4}$ ، نجد:

$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = 0$ أو $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$ ، وبالمكاملة والأخذ بعين الاعتبار معطيات المسألة نجد: $\ln\frac{z}{c} = \ln x + \ln y = \ln(xy)$

أي $z = cxy$ (حيث $c > 0$ ثابت ممكن اختياري).

هي حزمة سطوح سوية الضغط لهذا الغاز المتوازن. 8



السؤال الثالث : 15

(1) المعادلة التفاضلية الديكارتية لأسرة سطوح سوية الضغط في هذا السائل المتوازن هي :

$$X(M)\,dx + Y(M)\,dy + Z(M)\,dz = 0$$

وذلك أياً كانت $M \equiv (x,y,z)$ من هذه الأسرة، وحيث : $X(M) = x - \frac{1}{3}$

و $Y(M) = y + \frac{2}{7}$ ، $Z(M) = z+3$. وبالتعويض نحصل على المعادلة التفاضلية الديكارتية التالية :

$$(x - \tfrac{1}{3})\,dx + (y + \tfrac{2}{7})\,dy + (z+3)\,dz = 0$$

والتي إذا كاملناها نحصل على :

$$(x - \tfrac{1}{3})^2 + (y + \tfrac{2}{7})^2 + (z+3)^2 = c$$

حيث $c>0$ ثابت حقيقي اختياري.

ومنه سطوح سوية الضغط في هذا السائل المتوازن هي أسرة كرات متحدة المركز $C'(\frac{1}{3}, -\frac{2}{7}, -3)$ وأنصاف أقطارها هي $\sqrt{c}$ 10

(2) بما أن السائل متوازن ومعلق سطحه الحر معرض للضغط الجوي فإن هذا السطح الحر هو سطح سوية ضغط لهذا السائل المتوازن.

وبما أن أسرة سطوح سوية الضغط لهذا السائل المتوازن هي مجموعة كرات متحدة المركز $C'(\frac{1}{3}, -\frac{2}{7}, -3)$ وأنصاف أقطارها هي $\sqrt{c}$ ،
فإن السطح الحر بدوره هو كرة مركزها $C'(\frac{1}{3}, -\frac{2}{7}, -3)$ ونصف قطرها هو $\sqrt{c}$ (من أجل قيمة محددة لـ $c>0$) ومعادلته بالتالي هي :

5

$$(x - \tfrac{1}{3})^2 + (y + \tfrac{2}{7})^2 + (z-3)^2 = c$$